

28. 波長調制外差散斑干涉儀

李朱育 副教授、林坤億、盧洛霏
國立中央大學 光機電工程研究所

摘要

本文提出一套奈米級面內位移量測技術 - 「波長調制外差散斑干涉儀」。利用雷射二極體波長可調制的特性，以鋸齒波之電流調制，使其波長產生週期性的變化，再結合巧妙的光路設計，利用刻意製造的光程差，干涉後即產生外差光源，並利用此外差光作為主要的量測光源。

根據理論推導，本系統之理論解析度為 1 μm 。實驗結果證實，考慮環境擾動的情況下，本系統之實際解析度約 10 nm，量測靈敏度為 0.802 $^\circ/\text{nm}$ ，系統最大可量測速度為 18 $\mu\text{m}/\text{sec}$ 。

本系統利用光學量測的方式，可以精密地量測位移量，搭配價格低廉的架構與新的演算法，可取代昂貴的儀器設備，於精密定位系統的發展上，將是一套有發展潛力的精密量測技術。

關鍵字：光學量測、波長調制、外差干涉術、散斑干涉術、相位擷取演算法、位移量測

一、緒論

「極限」一直是人類所追求的目標，欲挑戰極限則必須有精良的後援作基石，才能進一步挑戰顛峰。近年來工業技術的發展，無不以追求微小作為發展的重點。奈米科技、微機電系統、半導體等產業的蓬勃發展，造就了許多精密加工與製程技術的向上提升。隨著人類慾望的提升，使得產業對所生產的產品要求越趨嚴格；越是輕巧的產品，生產過程就越需要精密的檢測，如此一來量測技術也必須更加努力的發展，才能滿足人們的期待與需求。

奈米科技的發展受到大多數科學家的關注。諾貝爾獎得主 Richard Smalley 在 1999 年 6 月美國參議院奈米科技聽證會上強調[1]：「奈米科技對未來人類健康及生活福祉貢獻，絕對不亞於本世紀微電子產品、醫學影像、電腦輔助工程、以及人造高分子材料的總合貢獻。」顯見奈米科技對人類未來的影響。著名的物理學家 R. Feynman 也認為[2]，要在原子(分子)尺度下發展，必須仰賴能夠操控與量測微小事物的微型化儀器。也因為社會各界對奈米科技的發展均有著正面的態度，使得現今全球許多國家在奈米的領域都投注了相當大的資金。光電產業、微機電製程、通訊電子產業、材料產業、生物科技與生醫技術等均是其發展的重點。美國對於奈米結構與奈米元件等技術皆具有相當深厚的研究基礎；歐洲地區德國也在材料、量測與薄膜等領域佔有一席之地；日本、韓國這些科技大國更是對於光電產有相當的研發成果，而台灣在半導體製程擁有著獨占鰲頭之勢。由此可見，奈米科技的發展對人類生活不僅產生莫大的影響，而其重要性更是與日俱增。

奈米科技的發展主因在於 1980 年代分析儀器的進步，對於奈米尺度的觀察與分析、物化性質研究和操控元子和分子的工具與能力都有非常重大的幫助。掃描穿隧顯微鏡(Scanning Tunneling Microscope, STM)、原子力顯微鏡(Atomic Force Microscope, AFM)與近場光學顯微鏡(Near-Field Microscope, NFM)等，均為當時重要的分析儀器。這些儀器須仰賴高精密度、高解析度與大行程的掃描平台的支援。奈米尺度所指的是 100 nm~0.1 nm 的範圍，傳統的量測機具難以量測如此微小的尺度。機械式的量測機具多半配合探針於待測物件的表面掃描，而微小物件卻容易因為接觸而導致待測物件的破壞；為了避免類似缺點，勢必需要發展非接觸式的量測技術，而光學量測正以此優點而備受矚目，其中又以光學干涉技術最受青睞。光學干涉技術，不僅擁有非接觸式量測的優勢，其高精確度、高解析度與高靈敏度的量測能力更是為人讚賞的優點。

一般而言，光學干涉儀可以分為同頻偵測與外差偵測。同頻偵測是將待測訊息載在單一頻率的光線中，在以干涉原理解讀出待測訊息。而外差偵測是將待測訊息載在兩束不同頻率的光線上，光線干涉後會產生拍頻訊號，而待測訊息則出現在拍頻訊號的相位或振幅中，透過解調技術將待測訊號中的訊息解調出來。相較於同頻偵測，外差偵測利用調制及解調技術，可以有效消除雜訊，同時具有高靈敏與高解析度的優點。因此外差干涉儀逐漸成為位移量測的主流。

產生外差光源的方法一般有機械式與電子式調制法兩類。機械式調制法主要是利用旋轉或規律性的機械式移動對光源產生移頻，而如此的調制方式容易引進機械震盪。量測系統中，微小的震盪會造成明顯的誤差。因此，機械式的外差調制法較不適用於精密的量測系統。電子式的調制法是目目前較受歡迎的系統，常見的有聲光晶體調制器(Acousto-Optic Modulator)、塞曼雷射(Zeeman laser)、電光晶體調制器(Electro-Optic Modulator)等。

聲光調制器以震盪訊號調制聲光晶體，入射光進入聲光晶體後，繞射光因為都卜勒效應而產生頻率改變，使得原入射光與繞射光產生頻差而作為外差光源。

塞曼雷射[3]是將雷射腔外纏繞線圈，線圈上通入電流即可在雷射腔內產生磁場，雷射光經過磁場作用後，出射光之兩正交偏振態存有頻差，藉以產生外差光源；此種產生差頻的方式與利用電光晶體調制器類似，電光晶體調制器是利用外加電場改變晶體的特性，使得光於兩正交偏振態上產生差頻[4]而成為外差光源；由於電光晶體調制器的價格不似塞曼雷射昂貴，且體積較聲光晶體調制器輕巧，使得電光晶體調制器成為現今外差系統常用的儀器之一。

除了利用上述儀器之外，外差光源也可以利用雷射二極體的波長可調變性，以輸入調變電流方式改變雷射光波長，分光後刻意製造不同的光程差，再將兩束光互相干涉後，亦可產生如外差干涉術的現象。

本論文之研究目的在利用價格較低的雷射二極體，配合簡單的光路架構製造外差光源，並且結合散斑干涉術，建構出一套成本低且架構輕便的面內位移量測儀器。

二、基礎理論

外差干涉術

外差干涉術主要是利用兩束頻率（波長）有些微差異的光，其中一束光作為參考，另一束光經過待測物，將需要量測的物理量載入光訊號之中。參考光與待測光的電場形式可表示為：

$$E_{ref} = E_0 \cdot e^{i(\omega_1 t + \Delta\phi)}, \quad (1)$$

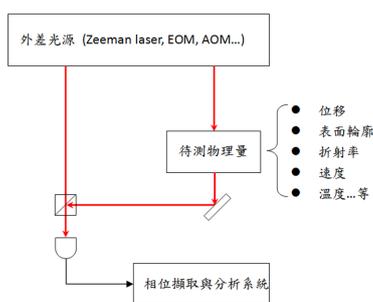
與

$$E_{test} = E_0 \cdot e^{i(\omega_2 t + \Delta\phi)}, \quad (2)$$

其中 E_0 為電場振幅， ω_1 、 ω_2 為頻率， $\Delta\phi$ 為待測物引入的光相位。爾後將兩束光線疊加干涉，兩訊號疊加干涉後可得強度訊號如下：

$$I \propto |E_{ref} + E_{test}|^2 = E_0^2 [2 + 2\cos(\Delta\omega \cdot t + \Delta\phi)], \quad (3)$$

其中 $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)$ 為兩束光的頻差，稱為拍頻。由干涉訊號可以知道，待測物理量被引入干涉訊號的相位之中，因此，只要擷取出相位，分析即可得到該待測物理量的資訊，這就是外差干涉術的基本原理，如圖一。



圖一：外差干涉術量測示意圖

波長調制外差干涉術

由於雷射二極體的光波波長可經由電流調變而受到調制，我們便利用這樣的特性，刻意製造不同光程的兩道雷射光，將其相互干涉後產生實驗所需的外差光源。

圖二為利用波長可調性產生外差光源的系統架構示意圖，兩束行走不同光程的雷射光，其電場形式可表示為：

$$E_1 = E_0 \cdot e^{i(k \cdot l_1)}, \quad (4)$$

與

$$E_2 = E_0 \cdot e^{i(k \cdot l_2)}, \quad (5)$$

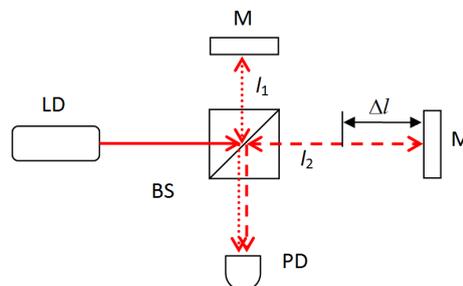
其中 l_1 、 l_2 為干涉儀兩臂長。假設兩束雷射光在理想的情況下振幅同為 E_0 ，互相重疊干涉後電場形式為：

$$E = E_1 + E_2, \quad (6)$$

而光強度正比於電場平方，因此可表示為：

$$I \propto |E|^2 = 2E_0^2 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2\Delta l\right) \right], \quad (7)$$

其中， $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 為光波波數， $\Delta l = l_2 - l_1$ 為干涉儀之兩臂長差。



圖二：波長調制外差光源之架構示意圖

此時，在雷射二極體的線性工作區內，輸入一調制深度為 Δi 的鋸齒波電流，雷射二極體因為外部輸入電流改變而使輸出的雷射光波長受到調變。假設所使用的雷射光中心波長為 λ_0 ，受電流調制的光波波長調變量為 $\Delta\lambda = \alpha \cdot \Delta i$ （ α 為電流調制比），調變週期為 T ，因此波長變化可寫為：

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \Delta\lambda \cdot t, \quad \lambda(t+T) = \lambda(t), \quad (8)$$

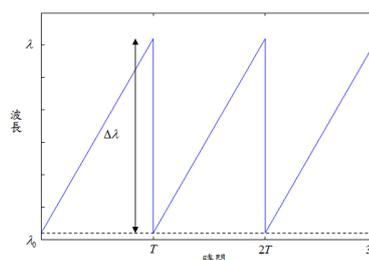
經由數值軟體可模擬出波長調變圖如圖三所示。假設 $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ ，則式(7)中的餘弦相位可寫為：

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\lambda(t)} \cdot 2\Delta l &= \frac{4\pi}{\lambda_0 + \Delta\lambda \cdot t} \cdot \Delta l \\ &= \frac{4\pi}{\lambda_0 \left(1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \cdot t \right)} \cdot \Delta l \approx \left(\frac{4\pi}{\lambda_0} - \frac{4\pi \cdot \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \cdot t \right) \Delta l, \end{aligned} \quad (9)$$

由於光程不同的關係，光偵測器（PD）所接收到的光強度可寫成：

$$I(t) \propto I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda_0} \Delta l - \frac{4\pi \cdot \Delta\lambda \cdot \Delta l}{\lambda_0^2} \cdot t \right) \right], \quad (10)$$

餘弦相位中， $\frac{4\pi}{\lambda_0} \Delta l$ 為干涉儀兩臂長度不同引入的相位差，而 $\frac{4\pi \cdot \Delta\lambda \cdot \Delta l}{\lambda_0^2} \cdot t$ 則為波長隨時間變化而引進的外差頻率項。



圖三：雷射二極體波長調變圖

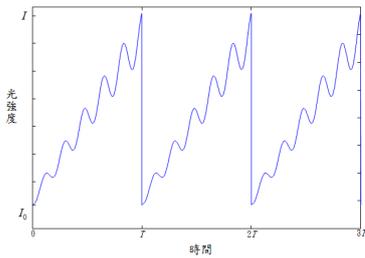
雷射二極體受電流調制時，發光功率同時也受到調變，因此光偵測器所接收之干涉光強度因發光強度改變而修改為：

$$I(t) \propto (I_0 + \Delta I \cdot t) \cdot \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi \cdot \Delta l}{\lambda_0} - \frac{4\pi \cdot \Delta l}{\lambda_0^2} \Delta \lambda \cdot t \right) \right], \quad [11]$$

$$I(t+T) = I(t)$$

其中 I_0 為平均光強度， ΔI 為調制強度。

在式 (11) 中之干涉項內 $\frac{4\pi \Delta l \Delta \lambda}{\lambda_0^2}$ 即為代表外差光源的拍頻，因此證明波長調制干涉架構也可以產生外差干涉術所需的外差光源。

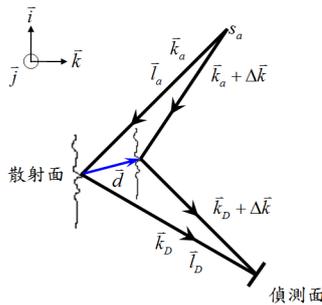


圖四：波長調制干涉光強度變化圖

三、散斑干涉術

雷射光入射進一散射面後，會四面八方的向外散射光線。如圖五中所示， \vec{l}_a 、 \vec{l}_D 為光路徑， \vec{k}_a 、 \vec{k}_D 為光的傳遞向量，當光源 s_a 經散射而到達偵測面時，光程引進的相位可寫成：

$$\delta_a = \vec{k}_a \cdot \vec{l}_a + \vec{k}_D \cdot \vec{l}_D, \quad [12]$$



圖五：光散射示意圖

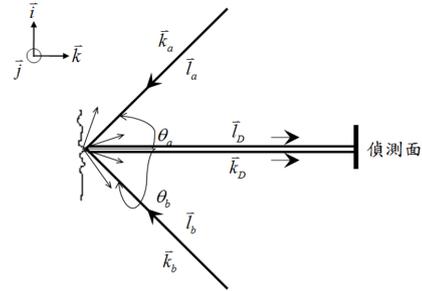
根據 R. S. Sirohi 與 F. S. Chau 所著 Optical Methods of Measurement 一書中分析 [5]，當散射面有一任意方向的位移 \vec{d} 時，相位差可寫成：

$$\Delta \delta_a = (\vec{k}_D - \vec{k}_a) \cdot \vec{d}, \quad [13]$$

如圖五所示，依據式 (12) 與式 (13)，當散射面將光源 s_a 的光束散射至偵測面時，偵測面接收到的光電場型式為：

$$E_a = E_0 e^{i[\vec{k}_a \cdot \vec{l}_a + \vec{k}_D \cdot \vec{l}_D + (\vec{k}_D - \vec{k}_a) \cdot \vec{d}]}, \quad [14]$$

我們可以發現，在偵測面所得到的光強度訊號中，位移資訊已經被納入光相位之中。接著我們將利用干涉的方式確實將帶有位移資訊的相位獨立出來。



圖六：散斑干涉術理論示意圖

根據 P. K. Rastogi 所著 Optical Measurement Techniques and Applications 一書中分析 [6]，如圖六所示，當散射面的位移 $\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 時，且入射光分別以 θ_a 與 θ_b 入射，入射後散射至偵測面干涉時，兩束光之波數為 $k_a = \frac{2\pi}{\lambda} (-\sin\theta_a \vec{i} - \cos\theta_a \vec{k})$ 、 $k_b = \frac{2\pi}{\lambda} (\sin\theta_b \vec{i} - \cos\theta_b \vec{k})$ 、 $k_D = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{k}$ ，因此兩束光之相位差則可改寫成：

$$\begin{aligned} \Delta \delta &= (\delta_a + \Delta \delta_a) - (\delta_b + \Delta \delta_b) \\ &= (k_a - k_b) \cdot \vec{d} \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} [x(\sin\theta_a - \sin\theta_b) + z(\cos\theta_a - \cos\theta_b)] \end{aligned}, \quad [15]$$

倘若入射角對稱， $\theta = \theta_a = -\theta_b$ ，則式 (15) 可改寫成：

$$\Delta \delta = \frac{2\pi}{\lambda} [(l_a - l_b) + 2 \cdot x \sin\theta], \quad [16]$$

兩束光於偵測面產生干涉，干涉光強度可表示為：

$$\begin{aligned} I &\propto 2E_0^2 [1 + \cos(\Delta \delta)] \\ &= 2E_0^2 \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (l_a - l_b) + \frac{4\pi}{\lambda} \cdot x \sin\theta \right] \right\}, \end{aligned} \quad [17]$$

至此，我們可以發現散射面之面內位移量 x 已經被載入干涉光的相位之中。

根據以上理論的推導，利用相位擷取技術取出干涉訊號的相位變化量：

$$\Phi = \frac{4\pi}{\lambda} x \sin\theta, \quad [18]$$

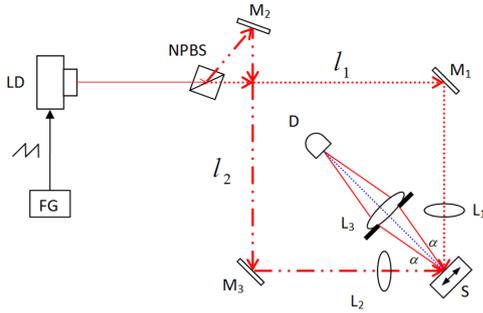
經由換算後，即可由相位變化推得位移變化量：

$$x = \frac{\lambda}{4\pi \sin\theta} \cdot \Phi, \quad [19]$$

四、系統架構

波長調制外差散斑干涉儀

圖七即為波長調制外差散斑干涉儀的架構圖。雷射二極體受到數位函數訊號產生器的鋸齒波電流調制後，發射出一束波長隨時間變化的雷射光源，經由光路設計分出兩束不同光程的雷射光射向位移平台上的散射面。當平台移動時，白紙上的光斑會將位移訊號引入光的相位之中，最後利用光偵測器接收光強度訊號，再經由訊號擷取卡將訊號送入電腦運算後可得知位移的資訊。



圖七：系統架構圖

如圖七所示，首先雷射二極體 (LD) 利用溫度控制器固定溫度，在以電流驅動使其在工作範圍內發出一中心波長為 λ_0 的雷射光束，接著以訊號產生器(FG)產生鋸齒波訊號調制雷射二極體，雷射光經由非極化偏分器 (NPBS) 分光，分成一束直進的雷射光，經由反射鏡 M_1 反射後打向位移平台上的白紙，其電場形式可寫為：

$$E_1(t) = E_0 \exp\{i[k(t) \cdot l_1]\}, \quad (20)$$

另一束光則向上前進，經過反射鏡 M_2 與 M_3 反射後，一樣射向位移平台上的白紙，其電場形式可表示為：

$$E_2(t) = E_0 \exp\{i[k(t) \cdot l_2]\}, \quad (21)$$

其中， l_1 、 l_2 為光束所走的光程， $k(t) = \frac{2\pi}{\lambda(t)}$ 為波數。

兩束受調制且光程不同的雷射光，入射在位移平台上的白紙上，當平台位移時，兩束入射光會依據之前的散斑干涉術理論，將位移資訊載在光的相位中，其電場可寫成：

$$E_1(t) = E_0 \exp\{i[k(t) \cdot l_1 + \phi_1^{sig}]\}, \quad (22)$$

與

$$E_2(t) = E_0 \exp\{i[k(t) \cdot l_2 + \phi_2^{sig}]\}, \quad (23)$$

其中 ϕ_1^{sig} 、 ϕ_2^{sig} 為平台位移所引進的相位變化，最後經由光偵測器所接收到的光強度訊號即可用式(24)來表示：

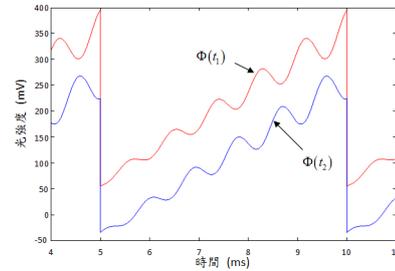
$$\begin{aligned} I(t) &\propto |E_1 + E_2|^2 \\ &= 2E_0^2 \{1 + \cos[k(t) \cdot (l_2 - l_1) + (\phi_2^{sig} - \phi_1^{sig})]\}, \quad (24) \\ &= 2I_0 [1 + \cos[k(t) \cdot \Delta l + \Phi]] \end{aligned}$$

其中 $\Delta l = (l_2 - l_1)$ 為光程差， $\Phi = (\phi_2^{sig} - \phi_1^{sig})$ 為待測相位差；當雷射二極體受到調變使得波長隨時間變化時，如式(10)，則式(24)則可以改寫為：

$$\begin{aligned} I(t) &\propto 2I_0 \left[1 + \cos\left[\frac{2\pi \cdot \Delta l}{\lambda_0} - \frac{2\pi \cdot \Delta l \cdot \Delta \lambda}{\lambda_0^2} + \Phi \right] \right] \\ &= 2I_0 [1 + \cos(\phi_0 - \omega \cdot t + \Phi)] \\ I(t+T) &= I(t) \end{aligned}, \quad (25)$$

其中 $\phi_0 = \frac{2\pi \cdot \Delta l}{\lambda_0}$ 為初始相位， $\omega = \frac{2\pi \cdot \Delta l \cdot \Delta \lambda}{\lambda_0^2}$ 即為外差光源的拍頻；而當雷射二極體受電流調制後，發光強度也應受到相同形式的調變，因此光強度方程式(25)應修改為：

$$\begin{aligned} I(t) &\propto (I_0 + \Delta I \cdot t) [1 + \cos(\phi_0 - \omega \cdot t + \Phi)], \quad (26) \\ I(t+T) &= I(t) \end{aligned}$$



圖八：波長調制外差散斑干涉訊號圖

如圖八所示，發生位移運動時，相位變化將載入光干涉訊號中。倘若能夠擷取出不同時間下的相位變化，根據式(19)即可將換算出位移變化。因此我們開發出新的相位演算法，取代鎖相放大器，並取出訊號中的相位變化。

訊號解調系統

我們先利用DAQ卡擷取出光偵測器所接收到的光強度訊號，同時也將電流的調變訊號擷取進電腦中。將光強度訊號扣除電流調制訊號後如式(27)中所示，光強度訊號可簡化成：

$$I(t) \propto DC_1(t) + AC_1 \cos[\phi_0 - \omega \cdot t + \Phi(t)], \quad (27)$$

其中 DC_1 、 AC_1 分別代表光強度的直流項與交流項；為了量測出位移訊號，我們必須取出光強度訊號中的相位變化量 $\Phi(t)$ 。因此我們在同樣的訊號中特地將時間延遲了 $\Delta\tau$ ，則光強度訊號可寫成：

$$\begin{aligned} I_{\Delta\tau}(t + \Delta\tau) &= DC_2(t) + AC_2(t) \cos[\phi_0 - \omega \cdot (t + \Delta\tau) + \Phi(t + \Delta\tau)] \\ &= DC_2(t) + AC_2(t) \cos[\phi_0 - \omega \cdot t - \omega \cdot \Delta\tau + \Phi(t + \Delta\tau)] \end{aligned}, \quad (28)$$

當 $\omega \cdot \Delta\tau = \frac{\pi}{2}$ 時，則式(28)可以改寫成：

$$I_{\Delta\tau}(t + \Delta\tau) = DC_2(t) + AC_2(t) \sin[\phi_0 - \omega \cdot t + \Phi(t + \Delta\tau)], \quad (29)$$

為了達到如式(27)與式(29)的取樣目的，則必須要找出擷取資料的觸發點。

DAQ卡所擷取的數據中，另外包含了調變雷射二極體的鋸齒波調制訊號，如圖九所示，我們利用程式判斷出電訊號轉折點出現的時間為觸發時間 t^{trig} ，再以觸發時間為基準設定時間長度 τ_1 ，以 $t_1 = t^{trig} + \tau$ 為第一取樣點，設定時間長度 τ' ，而 $t_1' = t^{trig} + \tau'$ 為第二取樣點，並且使第一取樣點與第二取樣點的時間間隔 $\Delta\tau = \tau' - \tau$ ，恰好可使 $\omega \cdot \Delta\tau = \frac{\pi}{2}$ ，藉此將干涉訊號的頻率鎖定在外差頻率 ω ；利用此取樣方式即可將光強度訊號擷取出如式(30)與式(31)的光強度訊號：

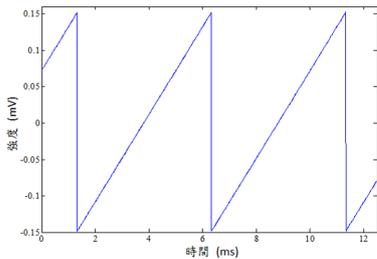
$$I_1^{test}(t_1) = DC_1(t) + AC_1(t) \cos[\phi_0 - \omega \cdot (t_1) + \Phi(t_1)] \quad (30)$$

與

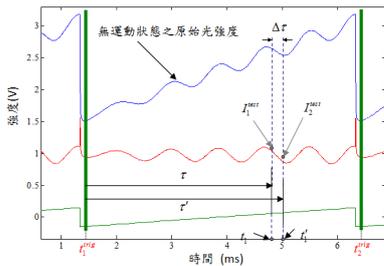
$$I_2^{test}(t_2') = DC_2(t) + AC_2(t) \cos[\phi_0 - \omega \cdot (t_1') + \Phi(t_1')] \quad (31)$$

$$= DC_2(t) + AC_2(t) \sin[\phi_0 - \omega \cdot (t_1) + \Phi(t_1 + \Delta\tau)]$$

擷取訊號點如圖十，所示最後我們將 I_1^{test} 、 I_2^{test} 分別儲存成陣列，以便後半段程式進行相位解調。



圖九：電流調制訊號



圖十：訊號擷取分析圖

為了擷取相位，首先讀取LabVIEW所儲存的擷取訊號 I_1^{test} 、 I_2^{test} ，接著將兩訊號相除後，結果如式(32)所示：

$$P = \frac{I_2^{test}}{I_1^{test}} = \frac{DC_2(t) + AC_2(t) \sin[\phi_0 - \omega t_1 + \Phi(t_1 + \Delta\tau)]}{DC_1(t) + AC_1(t) \cos[\phi_0 - \omega t_1 + \Phi(t_1)]} \quad (32)$$

假設運動速度不快，且擷取時間間隔 Δt 夠小，使得 $\Phi(t_1 + \Delta\tau) \approx \Phi(t_1)$ ，則式(32)可改寫成：

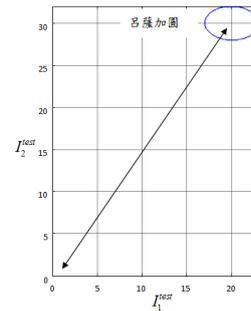
$$P = \frac{I_2^{test}}{I_1^{test}} = \frac{DC_2(t) + AC_2(t) \sin[\phi_0 - \omega t_1 + \Phi(t_1)]}{DC_1(t) + AC_1(t) \cos[\phi_0 - \omega t_1 + \Phi(t_1)]} \quad (33)$$

將式(33)作反正切運算後可表示為：

$$\phi(t_1) = \tan^{-1}(P) = \tan^{-1} \left(\frac{DC_2(t) + AC_2(t) \sin[\phi_0 + \Phi(t_1)]}{DC_1(t) + AC_1(t) \cos[\phi_0 + \Phi(t_1)]} \right) \quad (34)$$

其中 $\phi_0 = \phi_0 + \omega \cdot t$ 為基準相位。

假設擷取的強度訊號直流項都不為零，且交流項不相等，將此兩訊號作呂薩加圖，圖十一可以發現呂薩加圖的圓心不在原點上並且為一個橢圓狀，在反正切運算時，即會造成相位解調不準確，因此處理直流項是必要的動作。



圖十一：未調整之呂薩加圖

為了處理直流項，我們將所有擷取出來的光強度訊號取中點值，再將光強度訊號扣去中點值，使其直流項得以消除；另外再將兩強度訊號做比例處理，使其交流項相等，如此調整過後其呂薩加圖如圖十二所示，為一個以原點為圓心的圓。

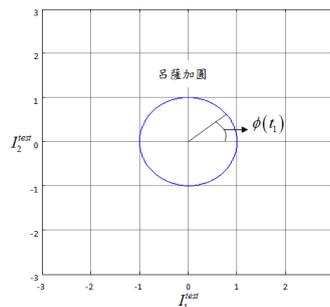
訊號經處理後直流項為零 ($DC = 0$) 且兩訊號的交流項相等 ($AC_1 = AC_2$)，經反正切運算後即可得到光強度訊號的相位變化為：

$$\phi(t) = \phi_0 + \Phi(t) \quad (35)$$

$$\Rightarrow \Delta\phi = \Phi(t)$$

然而經過反正切的運算，相位變化量卻被侷限在 $\pm\pi/2$ 的範圍內，若要完整的解析出相位變化，則必須經過解纏繞 (phase unwrapping) 的運算 [8,9]，經過程式解纏繞重建相位後，此一連續的相位變化最後即可將位移計算出來而得到式(36)：

$$x(t) = \left(\frac{\lambda_0}{4\pi \sin\theta} \right) \cdot \Delta\phi(t) \quad (36)$$

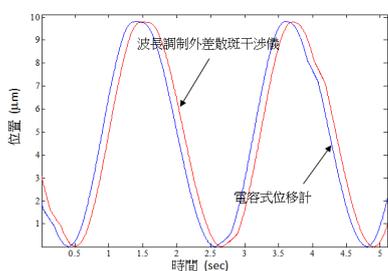


圖十二：調整後之呂薩加圖

五、實驗結果與討論

為了證實理論架構的正確性，本文將實驗的待測物-散射白紙貼附在壓電平台上，藉由訊號產生器以及電腦程式控制位移平台，產生相對應的位移運動。同時以商用的電容式位移計做比對量測。

首先利用訊號產生器輸入1 V的弦波電壓訊號於三軸向壓電位移平台，使其產生10 μm的位移量，並利用波長調制外差散斑干涉儀與電容式位移計同時進行量測。圖十三即為兩量測系統對弦波形式運動的量測結果，為了方便分辨兩系統的量測結果，在圖中我們將電容式位移計的量測圖延遲0.1秒。經過10次相同運動之實驗後，將所有量測之結果進行統計，整理出兩系統量測平均行程、峰對峰值的差量、差量比以及標準差列於表一中。



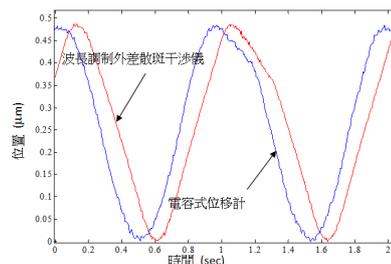
圖十三：10 μm之弦波形式運動量測圖

表一：10 μm之弦波形式運動量測數據統計表

量測次數	波長調制外差散斑干涉儀 (nm)	電容式位移計 (nm)	差量 (nm)	差量比 (%)
1	9785	9805	-20	-0.204
2	9798	9810	-12	-0.122
3	9795	9822	-27	-0.276
4	9787	9810	-23	-0.235
5	9788	9805	-17	-0.174
6	9795	9802	-7	-0.071
7	9780	9800	-20	-0.204
8	9794	9801	-7	-0.071
9	9785	9812	-27	-0.276
10	9798	9810	-12	-0.122
平均位移量	9791	9808	-17	-0.174
標準差	6.3	6.6		

表一顯示波長調制外差散斑干涉儀與電容式位移計所量測到的運動情況非常相近，且量測到的總行程量差量比不超過0.5 %。

除了微米級位移量測之外，我們令訊號產生器輸入50 mV的弦波電壓訊號，使得平台能夠產生行程為500 nm的弦波運動，再以波長調制外差散斑干涉儀與電容式位移計進行量測。兩量測系統對弦波形式運動的量測結果表現在圖十四，為了能夠方便分辨出兩系統的差異，我們仍然將電容式位移計的量測圖延遲0.1秒。經由10次相同運動實驗的量測結果進行統計，整理出兩系統量測的平均行程、峰對峰值的差量、差量比以及標準差列於表二中。



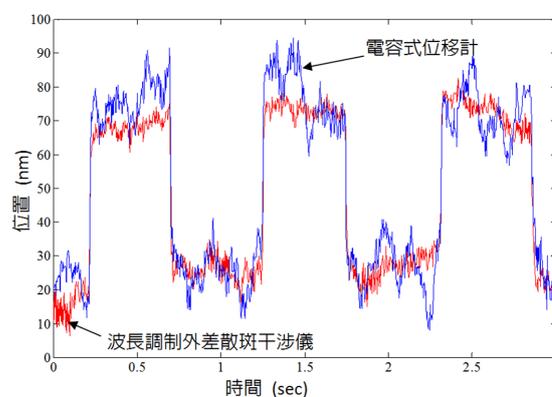
圖十四：500 nm之三角波形式運動量測圖

表二：500 nm之弦波形式運動量測數據統計表

量測次數	波長調制外差散斑干涉儀 (nm)	電容式位移計 (nm)	差量 (nm)	差量比 (%)
1	472	471	1	0.212
2	480	468	12	2.500
3	481	466	15	3.119
4	486	469	13	2.714
5	479	466	-3	-0.652
6	460	463	4	0.855
7	468	464	4	0.851
8	470	466	15	3.106
9	483	468	5	1.068
10	468	463	5	1.068
平均位移量	475	466	9	0.019
標準差	8.3	2.6		

由圖十四、表二可以知道，不僅微米級的運動，波長調制散斑干涉儀依舊可以如同電容式位移計一樣，準確的將500 nm的運動量測出來。

除了以上兩種運動外，我們也利用波長調制散斑干涉儀與電容式位移計來量測50nm的來回步階形式運動，實驗結果如圖十五所示，而實驗的統計結果列於表三。



圖十五：50 nm之步階運動量測圖

表三：50 nm之步階運動量測數據統計表

量測次數	波長調制外差散斑干涉儀 (nm)	電容式位移計 (nm)	差量 (nm)	差量比 (%)
1	47	43	4	8.511
2	47	45	2	4.255
3	46	40	6	13.043
4	47	65	-10	-20
5	50	60	-6	-11.111
6	54	60	-2	-4.444
7	45	47	-2	-4.651
8	43	45	-4	-9.091
9	44	48	-14	-32.558
10	43	57	-14	-32.558
平均位移量	47	51	-4	-9.442
標準差	3.4	8.7		

根據圖十五，無論是波長調制散斑干涉儀或電容式位移計，尚可量測50 nm的位移；然而在量測圖上看來，波長調制外差散斑干涉儀對於環境擾動的抑制能力較電容式位移計好。

系統解析度與靈敏度

解析度代表著一個量測系統所能解析的最小量測物理量，就波長調制外差散斑干涉儀而言，解析度就代表著系統所能量測的最小位移量。本實驗所使用的NI-6143為16 bit的類比數位轉換卡，因此理論的系統解析度為[10]：

$$R_s = \left(\frac{\lambda}{4\pi \times \sin\theta} \right) \cdot \frac{\Phi}{2^b} \quad (37)$$

其中 $b=16$ 為二進制位元數， $\theta=45^\circ$ 為實驗設定的入射角。根據式(37)計算得知，系統理論解析度約為1 μm 。若考慮雜訊影響，則系統實驗解析度約為10 nm。

靈敏度代表著系統對於輸入訊號的反應程度，亦即輸出值與輸入值的比值，也就是說每單位位移量對系統造成的相位變化量。以波長調制外差散斑干涉儀的量測靈敏度 S 應為：

$$S = \frac{\Phi}{x} = \frac{4\pi \cdot \sin\theta}{\lambda} \quad (38)$$

由式(38)可以知道，要提高系統靈敏度，可以藉由增加量測角度的方式來達到目的，因此經過計算後，可以得到本實驗架構 ($\theta=45^\circ$) 的量測靈敏度約為 $0.802^\circ/\text{nm}$ ，意即每1 nm的位移量將會有 0.802° 的相位變化量。

量測重複性

系統的量測重複性，主要是探討系統架構對於重複量測一待測物，其量測結果與平均值的關係，量測結果越接近量測平均值，則此系統的量測重複性就越高。通常系統的量測重複性多以量測值的標準差來代表，在本實驗的量測中，我們對不同的實驗各有十次重複的量測，表四即為量測數據的統計表。

表四：實驗數據之平均值與標準差統計表

實驗項目	平均值 ± 標準差 (nm)	
大行程運動	弦波運動	三角波運動
10 μm	9791 ± 6.3	9863 ± 8.1
1 μm	990 ± 5.4	1002 ± 5.0
0.5 μm	475 ± 8.3	480 ± 3.1
小行程運動	步階運動	
100 nm	102 ± 6.8	
50 nm	47 ± 3.4	
10 nm	11 ± 3.3	

由統計表可以了解到，波長調制外差散斑干涉儀無論在何種形式的運動下，其標準差皆不大於10 nm。

量測速度極限

一套量測裝置除了需要了解量測的大小極限以外，量測速度也是量測系統重要的規格之一，因此我們也對波長調制外差散斑干涉儀的量測速度作了以下的討論。

量測速度主要受限於系統的取樣頻率，取樣頻率越高，系統所能提供的量測速度就越快。假定一個完整的弦波 (360°) 最少需要4個時間間隔來描述。以我們設定的量測參數來計算的話，雷射二極體的調制頻率 (取樣頻率) 為200 Hz，也就是每秒最多可量測到 $\frac{200}{4+1} = 40$ 個弦波週期。系統每當有 360° 相移量時，代表位移量約為450 nm。經過計算，系統的最大量測速度為 $40 \times 0.45 = 18 (\mu\text{m/s})$ 。

六、誤差分析

造成誤差的原因主要可分為系統誤差與隨機誤差兩大類。系統誤差通常是指系統內部所產生的固定誤差值，若不加以改善，誤差量將以固定形式存在，而不會有機率分布的因素。系統誤差包含了幾何誤差、架構設計不良、理論推導所忽略的想法等。欲降低系統誤差則必須改良儀器或從對實驗理論的概念下手，才能有效的改善。隨機誤差通常指的是一些不易操控的變因產生的誤差，環境擾動、溫度等等，這些誤差通常會對量測值產生或大或小的差異。改善隨機誤差的方法則必須對實驗數據加以統計整理，藉由增加量測次數降低誤差的影響。

根據第二章理論推導，我們將式(19)作全微分得：

$$\frac{d(x)}{x} = \frac{d(\lambda)}{\lambda} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} d(\alpha) + \frac{d(\Phi)}{\Phi} \quad (39)$$

可以知道位移與波長、入射角和相位取得的變化有關，因此我們將對於這三項因素討論系統誤差量。

波長變化

由於本論文章採用的是調變波長作為量測的光源，而面內位移量與波長有關，因此波長的波動對於量測值必定會造成影響。

假設入射角與相位取得均無誤差，式(39)可簡化為：

$$\frac{d(x)}{x} = \frac{d(\lambda)}{\lambda} \quad (40)$$

由式(40)可以了解到量測誤差與波長有著正比的關係。一般雷射二極體之電流波長調變比約為0.0037 nm/mA，本實驗所調制波長約為0.02 nm的變化量。假設現有100 nm的面內位移量，波長變動大約會造成3 μm的量測誤差，由此可以判斷，微小的波長調變量，對於量測系統僅造成些微的誤差。

幾何誤差

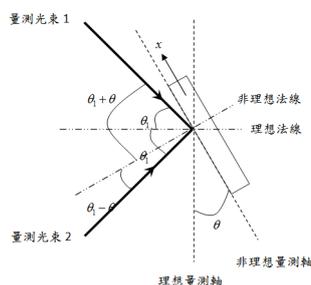
架設量測架構時，基本上都是經由人工的操作，以人眼的判斷下，很難對架構有非常準直且精確的擺設，因此容易產生固定的系統誤差。

假設波長固定，不考慮相位擷取誤差的情況下，量測誤差與角度的關係為：

$$\frac{d(x)}{x} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} d(\alpha) \quad , \quad (41)$$

因此假定量測入射角為45°，並且有1°的偏角，根據計算對於100 nm的面內位移量，將會產生100 nm的位移差量。不過由於此偏移量並非是時間的函數，在位移量測中將會是底線的偏移，而本實驗所測量的是相對位移量，因此不會影響到本系統的量測值。

除了入射角差異的討論外，量測軸與待測物表面若含有一角度差異，即會造成量測值的差異，稱作餘弦誤差。



圖十六：餘弦誤差示意圖

如圖十六所示，若量測面傾斜 θ ，則兩量測光束入射角將會有所改變，則式(16)需改寫成

$$\begin{aligned} \Delta\delta &= \frac{2\pi}{\lambda} \{ (l_a - l_b) + x \cdot [\sin(\theta_1 + \theta) + \sin(\theta_1 - \theta)] \} \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} [(l_a - l_b) + x \cdot 2\sin\theta_1 \cos\theta] \quad , \quad (42) \end{aligned}$$

如此一來，相位變化量則可以寫成

$$\Phi = x \frac{4\pi}{\lambda} \sin\theta_1 \cos\theta \quad , \quad (43)$$

以本實驗的架構 $\theta_1 = 45^\circ$ ，假設有100 nm位移量時，當傾斜角 $\theta = 1^\circ$ 時，量測到的位移量與實際位移量大約差15 μm。

溫度

隨機誤差中，環境周圍溫度也不易受到控制，雖然有空調系統在維持實驗室的空間溫度，但還是有溫度上的變化，一般冷氣空調系統，在溫度控制方面都會與設定溫度有著±1°C之間的差異。對機構上的材料而言，物

件的熱脹冷縮會導致光線對位的不準確，常用的光學元件對溫度的變化係數如表五所示[10]。

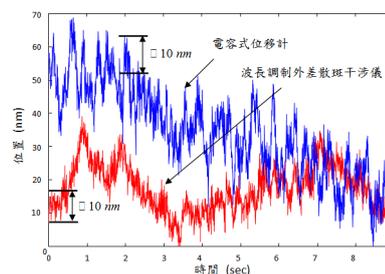
表五：各種材料之熱膨脹係數

材料	熱膨脹係數
光學玻璃(透鏡 反射鏡)	$\sim 5 \times 10^{-6}$
不鏽鋼(元件連結柱)	17.3×10^{-6}
鋁合金(元件夾具)	23.6×10^{-6}

有鑑於此，若要降低溫度對量測系統的影響，勢必選用熱膨脹係數較低的材料，盡可能使溫度對系統的影響降低。另外，由於雷射二極體對溫度的敏感度極高，稍微的溫度變化對波長也會有明顯的影響，也因為這樣的原因，本實驗架構中，控制雷射二極體的部份，我們也利用了溫度控制器維持其機殼的溫度，盡量避免溫度變因。

環境擾動

圖十九為九秒鐘之環境測試圖，圖中可以看到波長調制外差散斑干涉儀與電容式的所能解析的位移大小大約是10 nm。由於本系統為不共光程的量測系統，因此在九秒鐘的環境測試中可以發現會有約40 nm的飄移量，與電容式位移計的表現相似。



圖十九：環境測試

七、結論

本文提出一套光學量測機制—「波長調制外差散斑干涉儀」，用來量測微小面內位移。我們利用雷射二極體的波長可調性，以電流調變雷射出射光波長，配合光路設計製造光程差以產生外差光源，不僅降低使用塞曼雷射與電光調制器的高成本，也避免掉使用聲光調制器時，龐大體積所帶來的不便。除此之外，我們利用任意散射面作為本架構之量測待測物，相較於光柵干涉術，可以免去光柵製作誤差的影響，並且不受限於光柵的大小，可以做大範圍的量測。我們也成功利用程式的撰寫擷取出相位變化量，取代了鎖相放大器的解調技術，成本更因此而大大降低，使本系統的利用價值大大提高。

本系統「波長調制外差散斑干涉儀」擁有高解析度與高靈敏度的量測能力，根據計算，本系統的理论電子解析度可達1 μm，實際量測解析度約為10 nm。系統量測靈敏度為0.802 °/nm、系統可量測之位移速度為18 μm/s。

本文中也針對影響量測系統誤差的原因進行討論。系統誤差方面，波長、量測入射角與相位解調均會對系統造成影響；隨機誤差方面，溫度以及環境擾動也會對

量測造成不必要的誤差。為了降低量測誤差，提出了選用低熱膨脹係數的材料外，改善環境品質也是非常重要的方式之一。

參考文獻

- [1] S. T. Wang, Tainano Newsletter, Vol. II, No. 17, 2003
- [2] R. Feynman, 費曼的主張，天下文化，台北市，台灣，2001。
- [3] M. Sargent, et al., “Theory of a Zeeman laser I” , Phys. Rev., Vol. 164, pp. 436, 1967.
- [4] J. Y. Lee et al., “Heterodyne interferometer for measurement of in-plane displacement with subnanometer resolution” , Proc. SPIE, Vol. 6280, pp. 62800J, 2006
- [5] P. K. Rastogi, “Optical Measurement Techniques and Applications” , Artech House, Boston. London, 1997.
- [6] P. K. Rastogi, “Optical Measurement Techniques and Applications” , Artech House, Boston. London, 1997.
- [7] 陳輝毓，「外差光學式光柵干涉儀之研究」，國立中央大學機械工程研究所碩士論文，桃園縣，台灣，2006。
- [8] 李貴宇，「波長調制外差式光柵干涉儀之研究」，國立中央大學光機電工程研究所碩士論文，桃園縣，台灣，2007。
- [9] 李貴宇，「波長調制外差式光柵干涉儀之研究」，國立中央大學光機電工程研究所碩士論文，桃園縣，台灣，2007。
- [10] 丁均怡等，光學元件精密製造與檢測，財團法人國家實驗研究院儀器科技研究中心，新竹市，台灣，2007。