輕型水平關節機器人開發

黃敏昌／大華技術學院 機電工程系 助理教授

中臺瑞貿易有限公司多年來代理國外品牌的液壓系統、馬達及相關產品，然而面臨日益競爭的貿易環境，極需拓展新商機方可永續經營。故與本校合作開發「輕型水平關節機器人」，藉以開拓更寬廣的產品應用市場，並締造出更高附加價值的延伸商品。

關鍵詞：馬達、機器人。

1. 簡介

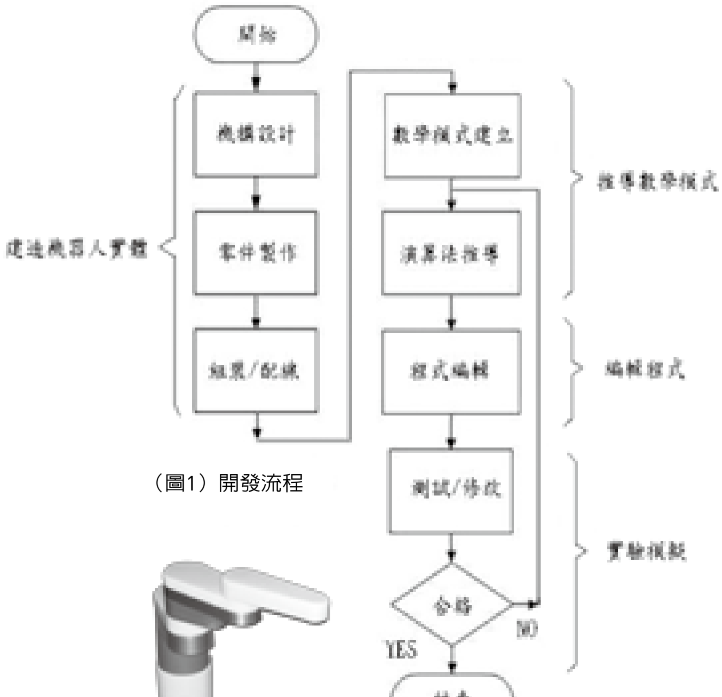
自柏林圍牆倒塌而結束了東西冷戰後，世界進入了新紀元，民生經濟成為各國政府經營的首要任務。而商業利益的結合逐漸超越了地域形成的國家。歐盟、美洲、東協莫不簽訂低關稅或零關稅的貿易協訂。歐盟甚至採用單一貨幣，這些措施都在消弭貿易屏障，促進民生經濟活絡，導致企業面臨著全球性的激烈競爭。

中臺瑞貿易有限公司多年來代理國外品牌的液壓系統、馬達及相關產品，即感受日益競爭的貿易環境。當遭逢美國次貸危機所引發的全球金融海嘯，導致訂單幾乎瞬間急凍，使得該企業體驗到前所未有的危機。幸賴政府各部門昂足全力推動各項振興經濟方案，本校得以有機會參與教育部推動的技專校院與產業園區產學合作計畫。

本文旨在介紹此產學合作的成果「輕型水平關節機器人」，我們成功地結合技術與學術為業者打造出機器人，落實了技術及零件國產化的理念。

2. 設計理念及開發流程

本計畫率先導入國產的平板觸控電腦開發出圖形人機界面[1]，提供使用者簡易且有效的操作環境。同時建立機器人[2][3][4][5]數學模式及軌跡運行控制。歷經數個月的努力(圖1)，逐步克服電機系統、機械構結及零件組裝等，終而完成機器人實體(圖2)。遂行了技術及零件國產化的理念。去年於臺北世貿展舉行第三屆上銀智慧機器手競賽時，曾以配角的姿態公開亮相。本機器人擬應用於輕負荷場合，如塗膠或電子零件插件，亦可勝任直線焊道熔接、弧形雷射切割及物品識別分類等工作。



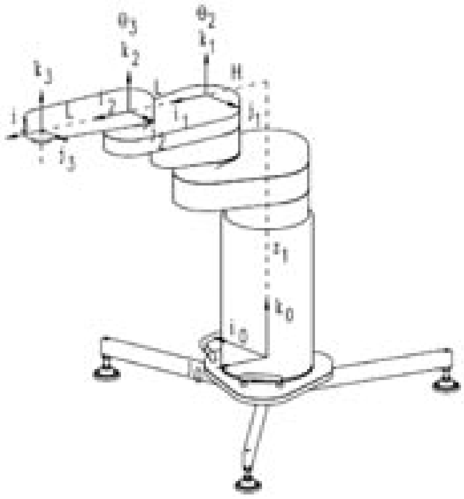
（圖1）開發流程

（圖2）機器人實體

3. 順向及逆向運動

本機器人具備三個自由度，第一軸為直線軸，第二軸及三軸皆為旋轉軸。根據1995年Denavit-Hartenberg[5]所提議的法則建立參考座標系統(圖3)。其方法闡述著將機器人軸關節n(直線或旋轉軸)定義成直角座標系n-1的k軸，而接續的座標系n之i軸需以垂直於k_{n-1}的方式設立。緊接著表列出相鄰座標系間的轉角參數θ_n、連桿位移量參數z_n、扭角參數α_n及連桿長度參數L_n(表1)。其中轉角參數θ_n是將i_{n-1}軸繞著k_{n-1}軸轉到與i_n平行的位置。連桿位移量參數z_n是指座標系n-1及

n的原點投影到k_{n-1}軸的距離值。扭角參數α_n是將k_{n-1}軸繞著i_n軸轉到與k_n軸平行的旋轉量。而連桿長度參數L_n則是軸k_{n-1}與軸k_n的垂直距離。



（圖3）Denavit-Hartenberg座標系統

（表1）D-H Parameters

Link Offset z_i	Joint Angle θ_i	Link ength L_i	Twist Angle α_i
z_1	$\dfrac{\pi}{2}$	H	0
0	θ_2	L	0
0	θ_3	L	0

根據表-1定義出三個齊次變換矩陣T_1^0、T_2及T_3^2，再將之合成為單一之齊次變換矩陣T_3^0，故得：

$$T_3^0 = T_1^0 T_2^1 T_3^2 = \left[T_{ij}\right] \tag{1}$$

其中T_3^0之各項結果為：

$$T_{11} = -\sin(\theta_2 + \theta_3)$$
$$T_{21} = \cos(\theta_2 + \theta_3)$$
$$T_{31} = 0$$
$$T_{41} = 0$$
$$T_{12} = -\cos(\theta_2 + \theta_3)$$
$$T_{22} = -\sin(\theta_2 + \theta_3)$$
$$T_{32} = 0$$
$$T_{42} = 0$$
$$T_{13} = 0$$
$$T_{23} = 0$$
$$T_{33} = 1$$
$$T_{43} = 0$$
$$T_{14} = -L\sin\theta_2 - L\sin(\theta_2 + \theta_3)$$
$$T_{24} = H + L\cos\theta_2 + L\cos(\theta_2 + \theta_3)$$
$$T_{34} = z_1$$
$$T_{44} = 1$$

齊次變換矩陣旨在建立起關節座標與空間座標間的關係。由於物品的位置是以空間座標來描述，然而真正主宰機器人運行抓取物品的卻是各軸關節座標。所以從物品的空間位置反推求其關節座標稱為逆向運動。而給定各軸關節座標將末端夾爪移至該位置則是順向運動。本水平關節機器人的逆向運動有兩組解，分別為右手姿態及左手姿態。下列三組方程式分別為順向、右手姿態逆向及左手姿態逆向運動方程式。

*順向運動方程式：

$$\begin{aligned} x &= -L\sin\theta_2 - L\sin(\theta_2 + \theta_3) \\ y &= H + L\cos\theta_2 + L\cos(\theta_2 + \theta_3) \\ z &= z_1 \end{aligned} \tag{2}$$

*右手姿態逆向運動方程式($\theta_2 < 0,\quad 0 < \theta_3$)：

$$\begin{aligned} \theta_3 &= 2\cos^{-1}\frac{r}{2L} \\ \theta_2 &= -\sin^{-1}\frac{x}{r} - \frac{\theta_3}{2} \\ z &= z \end{aligned} \tag{3}$$

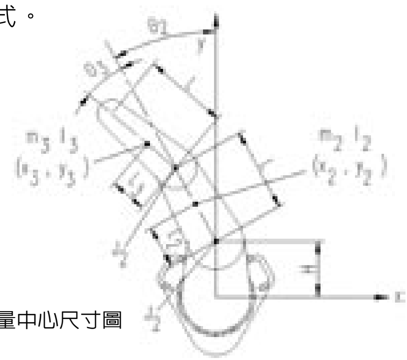
*左手姿態逆向運動方程式($0 < \theta$ ， $\theta_3 < 0$)：

$$\begin{aligned} \theta_3 &= -2\cos^{-1}\frac{r}{2L} \\ \theta_2 &= -\sin^{-1}\frac{x}{r} - \frac{\theta_3}{2} \\ z &= z \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + (y-H)^2}$

4. 拉格朗治動態方程

根據廣義座標及廣義力的概念，拉格朗治(Lagrange)[6]於1788年將動能與位能的差定義成行為函數(稱拉格朗治函數)。當此函數對時間作定積分，那麼其一階變分成為零的充分且必要條件正是系統的動態方程式。此結果不僅與D′Alembert虛功原理相互輝映，更闡述宇宙萬物的運行隱含優化的結果。拉格朗治是位才華洋溢的數學家，他在17歲才開始對數學感到興趣，進而透過自學一年就能發表論文，兩年後更擔當杜林皇家砲兵學院的教授。拉格朗治巧妙運用變分理論於動力分析，提供非常便捷且有效的方式建立動態方程式。



（圖4）質量中心尺寸圖

本機器人連桿2及3的質量中心分別如圖4所示，公式(6)~(8)為質量中心座標(x_2, y_2)及(x_3, y_3)。

$$x_2 = -L_2 \sin\theta_2 \tag{5}$$

$$y_2 = L_2 \cos\theta_2 + H \tag{6}$$

$$x_3 = -L\sin\theta_2 - L_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \tag{7}$$

$$y_3 = L\cos\theta_2 + L_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + H \tag{8}$$

令可移動部份的總質量為$m = m_1 + m_2 + m_3$，而連桿2對關節2的轉動慣量及連桿3對關節3的轉動慣量分別為$J_2 = I_2 + m_2 L_2^2$及$J_3 = I_3 + m_3 L_3^2$。則可求得拉格朗治函數(9)。

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2} m_{11} \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} - m_{11} g z_1 \end{aligned} \tag{9}$$

其中

$m_{11} = m$

$m_{22} = J_2 + J_3 + m_3 (L^2 + 2LL_3 \cos\theta_3)$

$m_{23} = J_3 + m_3 LL_3 \cos\theta_3$

$m_{33} = J_3$ 。

故機器人的動態方程式求得如下:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{11} g \\ \frac{\partial m_{22}}{\partial \theta_3} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \frac{\partial m_{23}}{\partial \theta_3} \dot{\theta}_3^2 \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial m_{22}}{\partial \theta_3} \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \tag{10}$$

其中

$$\frac{\partial m_{22}}{\partial \theta_3} = -2 m_3 LL_3 \sin\theta_3$$

$$\frac{\partial m_{23}}{\partial \theta_3} = -m_3 LL_3 \sin\theta_3$$

從公式(10)可觀察到第一軸之動態方程式與二三軸毫無關聯，而二三軸之動態方程式則是耦合在一起無法分開。這導致水平關節機器人在逆向運動問題上，第一軸可單獨求其逆向解，但二三軸卻必需同時求解二維非線性聯立方程式，狀態空間方程式的不變分佈亦印證此結果。

5. 狀態空間分析

近代控制理論主要是以狀態空間為發展基石，本系統的狀態空間方程式如(11)所示。

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{f} + \vec{g}_1 F_1 + \vec{g}_2 T_2 + \vec{g}_3 T_3 \\ \vec{y} &= C\vec{x} \end{aligned} \tag{11}$$

其中

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

$$\Delta = J_3 (J_2 + m_3 L) - (m_3 LL_3 \cos x_3)^2$$

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ -g \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} \text{where}$$

$$f_5 = \frac{1}{\Delta} (-m_{33} (\frac{\partial m_{22}}{\partial x_3} x_5 x_6 + \frac{\partial m_{23}}{\partial x_3} x_6^2) - \frac{1}{2} m_{23} \frac{\partial m_{22}}{\partial x_3} x_5^2$$

$$f_6 = \frac{1}{\Delta} (m_{23} (\frac{\partial m_{22}}{\partial x_3} x_5 x_6 + \frac{\partial m_{23}}{\partial x_3} x_6^2) + \frac{1}{2} m_{22} \frac{\partial m_{22}}{\partial x_3} x_6^2)$$

$$\vec{g}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_{41} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{g}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_{52} \\ g_{62} \end{bmatrix} \quad \vec{g}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_{53} \\ g_{63} \end{bmatrix} \text{where} \quad \begin{aligned} g_{41} &= \frac{1}{m_{11}} \\ g_{52} &= \frac{m_{33}}{\Delta} \\ g_{62} &= \frac{-m_{23}}{\Delta} \\ g_{53} &= \frac{-m_{23}}{\Delta} \\ g_{63} &= \frac{m_{22}}{\Delta} \end{aligned}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

以系統漂移向量(drift vector)$\vec{f}$與第一軸輸入向量(input vector)$\vec{g}_1$所衍生的李氏括號(Lie bracket]族群如(12)所示，僅$[\vec{f}, \vec{g}_1]$為非零向量，其餘皆為零向量。

$$[\vec{f}, \vec{g}_1] = \begin{bmatrix} \frac{-1}{m_{11}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [\vec{f}, [\vec{f}, \vec{g}_1]] = \vec{0}, ... \tag{12}$$

很顯然$\vec{g}_1$與$[\vec{f}, \vec{g}_1]$是互相獨立的兩個向量，其張成的向量分佈空間Ω_1具備二維的秩，且向量的第2、3、5及6項皆為零。

$$[\vec{f}, \vec{g}_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ -g_{52} \\ -g_{62} \\ 0 \\ x_6 g_{52,3} - g_{52} f_{5,5} - g_{62} f_{5,6} \\ x_6 g_{62,3} - g_{52} f_{6,5} - g_{62} f_{6,6} \end{bmatrix}, \quad [\vec{f}, [\vec{f}, \vec{g}_2]] = \begin{bmatrix} 0 \\ X \\ X \\ 0 \\ X \\ X \end{bmatrix}, \ldots \tag{13}$$

註: 公式(13)的X表示非零項，而$g_{52,3}$表示g_{52}項對x_3微分，其類推。

第二三軸輸入向量$\vec{g}_2$、$\vec{g}_3$與$\vec{f}$所衍生的李氏括號族群如(13)所示，形成的四階的向量分佈空間Ω_2，且向量的第1及4項皆為零。

由於Ω_1及Ω_2皆為內捲向量，根據Frobenius理論[7]存在對應的可積分流形。因為Ω_1及Ω_2皆為$\vec{f}$的不變分佈，所以在逆向運動問題上，第一軸可單獨求解，但二三軸卻必需同時考量而無法分割。又因Ω_1與Ω_2形成互補，其合併的向量分佈空間擁有六維的秩，故本系統是具備可控制性。基本上本系統可回饋各軸的位置信號及速度信號，但如果僅回饋各軸的位置信號是否仍具備可觀察

技術發展

性?檢驗位置輸出向量$\vec{y}$與$\vec{f}$所衍生的李氏括號族群，其形成的向量分佈空間確實擁有六維的秩，故僅回饋各軸的位置信號是足夠達成可觀察性。

6. 結論

本計畫不僅實際為業者建造機器人，亦進行若干學理分析。首先，運用Denavit-Hartenberg座標系統求出齊次變換矩陣，探討末端夾爪之順向及逆向運動，進而運用拉格朗治法則導出動態方程式。此方法的優點是只需一個純量函數就可決定整個系統動態。

本系統具備可控制性及可觀察性。第一軸與二三軸各自形成不變分佈，以致可各自求解逆向運動問題。

教育部推動此產學合作計畫不僅提供學術界絕佳的機會將知識具體化，而且也讓業者有機會運用學校資源進行研發。本校很榮幸能與中臺瑞貿易有限公司合作開發輕型水平關節機器人，藉此落實技術及零件國產化的理念。

參考文獻

1. Ben Shneiderman, Catherine Plaisant, Designing The User Interface, Strategies for Effective Human-Computer Interaction , Pearson Education Taiwan Ltd, 2010.
2. Richard D. Klafter, Thomas A. Chmielewski, Michael Negin, Robotic Engineering An Integrated Approach, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1989.
3. Min-Chan Hwang, Stephen Felszeghy, Robotic The Design and Building of a Robot with Two Degrees of Freedom, Journal of Nan Kai Institute of Technology, Vol. 5, No. 1, June 2008.
4. Min-Chan Hwang, Stephen Felszeghy, The Design and Building of a Robot with Five Degrees of Freedom, Journal of Material Science Forum, Vol. 594, pp.110-118, August 2008.
5. Richard D. Klafter, Thomas A. Chmielewski, Michael Negin, Robotic Engineering An Integrated Approach, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1989.
6. A. I. Lurie, Analytical Mechanics, Springer-Verlag, New York, 2002.
7. Henk Nijmeijier, Arjan van der Schaft, Nonlinear Dynamical Control Systems, Springer-Verlag, New York, 1990.